Spectra

Spectrum of $GL_2(2)$ (6 elements) Has copies of S_2, and S_3 (isomorphic to S_3)

0 -- 0
1 -- 1
2 -- 3
3 -- 2

Spectrum of $GL_3(2)$ (168 elements) Has copies of S_2, S_3 and S_4

0 -- 0
1 -- 1
2 -- 21
3 -- 56
4 -- 42
5 -- 0
6 -- 0
7 -- 48

Spectrum of $GL_4(2)$ (20,160 elements) Has copies of S_2, S_3, S_4, S_5 and S_6. (Not completely sure about 5 & 6)

0 -- 0
1 -- 1
2 -- 315
3 -- 1232
4 -- 3780
5 -- 1344
6 -- 5040
7 -- 5760
8 -- 0
9 -- 0
10 -- 0
11 -- 0
12 -- 0
13 -- 0
14 -- 0
15 -- 2688

Spectrum of $GL_5(2)$ 9,999,360 elements S_2, S_3, S_4, S_5 and S_6 not completely sure about 6. Cannot contain a copy of S_7 because no order 10 elements.

0 -- 0
1 -- 1
2 -- 6975
3 -- 75392
4 -- 416640

5 -- 666624
6 -- 1249920
7 -- 476160
8 -- 624960
9 -- 0
10 -- 0
11 -- 0
12 -- 833280
13 -- 0
14 -- 1428480
15 -- 1333248
16 -- 0
17 -- 0
18 -- 0
19 -- 0
20 -- 0
21 -- 952320
22 -- 0
23 -- 0
24 -- 0
25 -- 0
26 -- 0
27 -- 0
28 -- 0
29 -- 0
30 -- 0
31 -- 1935360

$$Z_{p,n} = \prod_{i=0}^{n-1} \left(p^n - p^i \right)$$

n	$Z_{2,n}$
1	1
2	6
3	168
4	20,160
5	9,999,360
6	20,158,709,760
7	163,849,992,929,280
8	5,348,063,769,211,699,200
9	699,612,310,033,197,642,547,200
10	366,440,137,299,948,128,422,802,227,200

This grows much faster than $n!$ but much slower than 2^{2^n}

Subdivisions of 6, 7, 8 9, and 10

Spectrum 6,5,4,3,2,1

o(6) 6
o(5) 5,1
o(4) 4,2
o(4) 4,1,1
o(3) 3,3
o(6) 3,2,1
o(3) 3,1,1,1
o(2) 2,2,2
o(2) 2,2,1,1
o(2) 2,1,1,1,1
o(1) 1,1,1,1,1,1

Spectrum 12,10,7,6,5,4,3,2,1

o(7) 7
o(6) 6,1
o(10) 5,2
o(5) 5,1,1
o(12) 4,3
o(4) 4,2,1
o(4) 4,1,1,1
o(3) 3,3,1
o(6) 3,2,1,1
o(3) 3,1,1,1,1
o(2) 2,2,2,1
o(2) 2,2,1,1,1
o(2) 2,1,1,1,1,1
o(1) 1,1,1,1,1,1,1

o(8) 8
o(7) 7,1
o(6) 6,2
o(6) 6,1,1
o(15) 5,3
o(10) 5,2,1
o(5) 5,1,1,1
o(4) 4,4
o(12) 4,3,1
o(4) 4,2,2
o(4) 4,2,1,1

o(4) 4,1,1,1,1
o(6) 3,3,2
o(3) 3,3,1,1
o(6) 3,2,1,1,1
o(3) 3,1,1,1,1,1
o(2) 2,2,2,2
o(2) 2,2,2,1,1
o(2) 2,2,1,1,1,1
o(2) 2,1,1,1,1,1,1
o(1) 1,1,1,1,1,1,1,1

Note: order is LCM of partition numbers.
o(9) 9
o(8) 8,1
o(14) 7,2
o(7) 7,1,1
o(6) 6,3
o(6) 6,2,1
o(6) 6,1,1,1
o(20) 5,4
o(15) 5,3,1
o(10) 5,2,2
o(10) 5,2,1,1
o(5) 5,1,1,1,1
o(4) 4,4,1
o(12) 4,3,2
o(12) 4,3,1,1
o(4) 4,2,2,1
o(4) 4,2,1,1,1
o(4) 4,1,1,1,1,1
o(3) 3,3,3
o(6) 3,3,2,1
o(3) 3,3,1,1,1
o(6) 3,2,2,2
o(6) 3,2,2,1,1
o(6) 3,2,1,1,1,1
o(3) 3,1,1,1,1,1,1
o(2) 2,2,2,2,1
o(2) 2,2,2,1,1,1
o(2) 2,2,1,1,1,1,1
o(2) 2,1,1,1,1,1,1,1
o(1) 1,1,1,1,1,1,1,1,1

o(10) 10
o(9) 9,1
o(8) 8,2
o(8) 8,1,1
o(21) 7,3
o(14) 7,2,1
o(7) 7,1,1,1
o(12) 6,4
o(6) 6,3,1
o(6) 6,2,2
o(6) 6,2,1,1
o(6) 6,1,1,1,1
o(5) 5,5
o(20) 5,4,1
o(30) 5,3,2
o(15) 5,3,1,1
o(10) 5,2,2,1
o(10) 5,2,1,1,1
o(5) 5,1,1,1,1,1
o(4) 4,4,2
o(4) 4,4,1,1
o(12) 4,3,3
o(12) 4,3,2,1
o(12) 4,3,1,1,1
o(4) 4,2,2,2
o(4) 4,2,2,1,1
o(4) 4,2,1,1,1,1
o(4) 4,1,1,1,1,1,1
o(3) 3,3,3,1
o(6) 3,3,2,1,1
o(3) 3,3,1,1,1,1
o(6) 3,2,1,1,1,1,1
o(3) 3,1,1,1,1,1,1,1
o(2) 2,2,2,2,2
o(2) 2,2,2,2,1,1
o(2) 2,2,2,1,1,1,1
o(2) 2,2,1,1,1,1,1,1
o(2) 2,1,1,1,1,1,1,1,1
o(1) 1,1,1,1,1,1,1,1,1,1